



TITLE:

# Banach空間における非拡大写像の 不動点への強収束定理 (非線形解析 学と凸解析学の研究)

AUTHOR(S):

鈴木, 智成

---

CITATION:

鈴木, 智成. Banach空間における非拡大写像の不動点への強収束定理  
(非線形解析学と凸解析学の研究). 数理解析研究所講究録 2000, 1136:  
56-59

ISSUE DATE:

2000-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/63783>

RIGHT:

## Banach 空間における非拡大写像の不動点への強収束定理

新潟大学・大学院自然科学研究科 鈴木智成 (TOMONARI SUZUKI)

### 1. 序

1953 年に W. R. Mann [2] は次のようなイテレーションについて考察した.

$$x_n = \sum_{j=1}^n \beta_{nj} y_j, \quad y_{n+1} = T(x_n)$$

ここで,  $T$  はある写像,  $\{\beta_{nj}\}$  は 2 重数列で,  $\beta_{nj} \geq 0$ ,  $\beta_{nj} = 0 (j > n)$ ,  $\sum_{j=1}^n \beta_{nj} = 1$  を満たすものとする. 特に, 2 重数列  $\{\beta_{nj}\}$  が  $\beta_{n+1,j} = (1 - \beta_{n+1,n+1})\beta_{nj} (j \leq n)$  を満たすとき, イテレーションは

$$(1) \quad x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n$$

と表現できる. ここで,  $\alpha_n = \beta_{n+1,n+1}$  である. このイテレーションに関連して, Reich は次の定理を証明している.

**定理 1** (Reich [4]).  $E$  を一様凸でかつ Fréchet 微分可能なノルムを持つ Banach 空間とする.  $C$  を  $E$  の閉凸部分集合とする.  $T$  を  $C$  上の非拡大写像とし, 不動点を持つと仮定する.  $\{\alpha_n\}$  を  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) = \infty$  を満たす  $[0, 1]$  区間の数列とする.  $x_1 \in C$  を任意に固定する. このとき, (1) で定義される点列  $\{x_n\}$  は  $T$  の不動点へ弱収束する.

定理 1 に関連して, 様々な条件下, 様々な写像に関する様々なイテレーションが考察されている. 例えば, 次の定理が証明されている.

**定理 2** (Atsushiba and Takahashi [1]).  $E$  を一様凸な Banach 空間で, Fréchet 微分可能なノルムを持つ, もしくは Opial 条件を満たす Banach 空間とする.  $C$  を  $E$  の閉凸集合とし,  $S$  と  $T$  を  $C$  上の可換でかつ共通不動点を持つ非拡大写像とする.  $\{\alpha_n\}$  を  $\limsup_n \alpha_n < 1$  を満たす  $[0, 1]$  区間の数列とする.  $x_1 \in C$  を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^{n-1} S^i T^j x_n$$

で定義される点列  $\{x_n\}$  は  $S$  と  $T$  の共通不動点へ弱収束する.

また定理 1 に関連して, C.L. Outlaw は次の定理を証明している.

**定理 3** (Outlaw [3]).  $C$  を狭義凸な Banach 空間  $E$  のコンパクト凸部分集合とする.  $T$  を  $C$  上の非拡大写像とし,  $x_1 \in C$  を任意に固定する. このとき,

$$(2) \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}Tx_n + \frac{1}{2}x_n$$

で定義される点列  $\{x_n\}$  は  $T$  の不動点へ強収束する.

**定理 4** (Outlaw [3]).  $C$  を一様凸な Banach 空間  $E$  の閉凸部分集合とする.  $T$  を  $C$  上の非拡大写像とする.  $T$  の不動点集合  $F$  は空でない事, および任意の  $x \in C$  に対して

$$\|x - Tx\| \geq c \cdot d(x, F)$$

を満たす定数  $c > 0$  の存在する事を仮定する.  $x_1 \in C$  を任意に固定する. このとき, (2) で定義される点列  $\{x_n\}$  は  $T$  の不動点へ強収束する. ここで,  $d(x, F) = \inf\{\|x - w\| : w \in F\}$  である.

本論文では, 定理 3 および定理 4 を拡張した結果について述べる.

## 2. 結果

始めに, 定理を証明する際に必要となる補助定理について述べる.

**補助定理 1.**  $\{z_n\}$  と  $\{w_n\}$  を Banach 空間  $E$  の元よりなる点列とする.  $\{\alpha_n\}$  は  $\limsup_n \alpha_n < 1$  を満たす  $[0, 1]$  区間の数列とする. 自然数  $k$  を固定する. そして以下を仮定する:  $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1 - \alpha_n)z_n$  である;  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$  に対して,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+j}\| - \|z_n - z_{n+j}\| \leq 0$$

が成立する. このとき,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \|w_{n+k} - z_n\| - (1 + \alpha_n + \dots + \alpha_{n+k-1}) \cdot d \right| = 0$$

が成立する. ここで,  $d = \liminf_n \|w_n - z_n\|$  である.

**補助定理 2.**  $\{z_n\}$  と  $\{w_n\}$  を Banach 空間  $E$  の元よりなる有界な点列とする.  $\{\alpha_n\}$  を  $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$  を満たす  $[0, 1]$  区間の数列とする. そして以下を仮定する:  $z_{n+1} = \alpha_n w_n + (1 - \alpha_n)z_n$  である; 任意の自然数  $k$  に対して,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+k}\| - \|z_n - z_{n+k}\| \leq 0$$

が成立する. このとき,  $\liminf_n \|w_n - z_n\| = 0$  が成立する.

証明.  $a = \liminf_n \alpha_n > 0$ ,  $M = 2 \cdot \sup\{\|z_n\| + \|w_n\| : n \in \mathbb{N}\}$  として  $d = \liminf_n \|w_n - z_n\|$  と置く.  $d > 0$  を仮定して矛盾を導く.  $(1 + ka)d > M$  を満たす自然数  $k$  を固定する. 補助定理 1 より,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \|w_{n+k} - z_n\| - (1 + \alpha_n + \cdots + \alpha_{n+k-1}) \cdot d \right| = 0$$

を得る. つまり,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|w_{n+k} - z_n\| \geq (1 + ka)d > M$$

となり, 矛盾を得る. 従って,  $d = 0$  である.  $\square$

この補助定理を用いて, 定理 4 の拡張定理を証明する.

**定理 5.**  $C$  を Banach 空間  $E$  の閉凸部分集合とする.  $T$  を  $C$  上の非拡大写像とする.  $T$  の不動点集合  $F$  は空でない事, および任意の  $x \in C$  に対して

$$\|x - Tx\| \geq c \cdot d(x, F)$$

を満たす定数  $c > 0$  の存在する事を仮定する.  $\{\alpha_n\}$  を  $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$  を満たす  $[0, 1]$  区間の数列とする.  $x_1 \in C$  を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \alpha_n Tx_n + (1 - \alpha_n)x_n$$

で定義される点列  $\{x_n\}$  は  $T$  の不動点へ強収束する.

証明.  $T$  の不動点  $w$  を固定する.

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - w\| &= \|\alpha_n Tx_n + (1 - \alpha_n)x_n - w\| \\ &\leq \alpha_n \|Tx_n - w\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - w\| \\ &\leq \|x_n - w\| \end{aligned}$$

および  $\|Tx_n - w\| \leq \|x_n - w\|$  より,  $\{x_n\}$  と  $\{Tx_n\}$  は有界点列である. 補助定理 2 より,  $\liminf_n \|Tx_n - x_n\| = 0$  を得る.

$$\begin{aligned} \|Tx_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq \|Tx_{n+1} - Tx_n\| + \|Tx_n - x_{n+1}\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|Tx_n - x_{n+1}\| \\ &= \|Tx_n - x_n\| \end{aligned}$$

に注意して,  $\lim_n \|Tx_n - x_n\| = 0$  を得る. 仮定より,  $\lim_n \|x_n - w_n\| = 0$  を満たす  $T$  の不動点よりなる点列  $\{w_n\}$  が存在する.  $m > n$  のとき,  $\|x_m - w_n\| \leq \|x_n - w_n\|$  であることに注意して,

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - w_n\| + \|x_n - w_n\| \leq 2\|x_n - w_n\|$$

を得る. したがって,  $\{x_n\}$  は Cauchy 列であり, ある  $C$  の元  $z$  に強収束する. そして,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z - w_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z - x_n\| + \|x_n - w_n\| = 0$$

より,  $z$  は  $T$  の不動点である. □

この定理の直接の系として, 定理 3 の拡張定理を得る.

**系 1.**  $C$  を Banach 空間  $E$  のコンパクト凸部分集合とする.  $T$  を  $C$  上の非拡大写像とする.  $\{\alpha_n\}$  を  $0 < \liminf_n \alpha_n \leq \limsup_n \alpha_n < 1$  を満たす  $[0, 1]$  区間の数列とする.  $x_1 \in C$  を任意に固定する. このとき,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n$$

で定義される点列  $\{x_n\}$  は  $T$  の不動点へ強収束する.

#### 参考文献

- [1] S. Atsushiba and W. Takahashi, "Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces", *Bull. Austral. Math. Soc.*, **57** (1998), 117–127.
- [2] W. R. Mann, "Mean value methods in iteration", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 506–510.
- [3] C. L. Outlaw, "Mean value iteration of nonexpansive mappings in a Banach space", *Pacific J. Math.*, **30** (1969), 747–750.
- [4] S. Reich, "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, **67** (1979), 274–276.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATION SCIENCE, GRADUATE SCHOOL  
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, NIIGATA UNIVERSITY, NIIGATA 950-2181, JAPAN  
E-mail address: tomonari@math.sc.niigata-u.ac.jp